
Preprint No. M 18/06

Zirkulante Matrizen und Einheitswurzeln

Peter E. John

2. korrigierte Auflage des Preprint No. M 18/02, April 2018

URN: urn:nbn:de:gbv:ilm1-2018200077

Impressum:

Hrsg.: Leiter des Instituts für Mathematik
Weimarer Straße 25
98693 Ilmenau
Tel.: +49 3677 69-3621
Fax: +49 3677 69-3270
<http://www.tu-ilmenau.de/math/>

Zirkulante Matrizen und Einheitswurzeln

Preprint No. M 18/02: 2. korrigierte Auflage, April 2018

Peter E. John

Institut für Mathematik der Technischen Universität Ilmenau

In memoriam Klaus Möckel, Mühlhausen, 1929 – 2017

Schlagworte:

zirkulante Matrix, komplexe Zahlen, Hauptminor, charakteristisches Polynom, Eigenwerte, trigonometrische Produkte und Summen, Koeffizientendreieck und eine interessante Determinante

Über zirkulante Matrizen, welche eine spezielle Form der Toeplitz Matrizen⁽⁵⁾ sind, gibt die ausgezeichnete Monographie „Circulant Matrices“ von P. J. Davis⁽¹⁾ einen umfassenden Überblick. Viele Arbeiten zu dieser Thematik sind erschienen. Um nur einige zu nennen, werden zirkulante und schiefzirkulante Matrizen untersucht, deren Elemente zum Beispiel Fibonacci-Zahlen^(10,12,14,15), Lucas-Zahlen^(11,12,14,15), Tribonacci-Zahlen⁽²⁾ sind, und werden auch in einer Arbeit über quadratische Formen⁽⁴⁾ angewandt. Auch über links-zirkulante und links-schiefzirkulante Matrizen findet der interessierte Leser genügend Zitate im Internet. Ebenso können lineare Gleichungen mit Hilfe von zirkulanten Matrizen gelöst werden⁽⁷⁾. In dieser Arbeit werden zirkulante und schiefzirkulante (n,n) -Matrizen betrachtet, deren Elemente Potenzen von n -ten Einheitswurzeln sind.

1. Grundlagen

Es seien $n > 1$ eine natürliche Zahl und $\mathbf{M} = \mathbf{M}_n = (m_{jk})$ eine quadratische Matrix vom Typ $n \times n$ (kurz: n -Matrix; $j, k = 1, 2, \dots, n$), deren Elemente komplexe Zahlen sind. Matrix \mathbf{M}_l sei ein l -Hauptminor von \mathbf{M} ($l = 0, 1, 2, \dots, n$); davon gibt es genau $\binom{n}{l}$ Matrizen.

Mit der n -Einheitsmatrix $\mathbf{I} = \mathbf{I}_n$ sei $\mathbf{M}(x) = (x\mathbf{I} - \mathbf{M})$ und nach einem bekannten Satz⁽³⁾ aus der Theorie der Matrizen erhält man das *charakteristische Polynom* $p_{\mathbf{M}}(x)$ von \mathbf{M} zu

$$p_{\mathbf{M}}(x) = \det \mathbf{M}(x) = x^n + \sum_{l=1}^{l=n} (-1)^l m_l x^{n-l}, \text{ wobei } m_l = \sum_{\binom{n}{l}} \det(\mathbf{M}_l) \text{ ist,} \quad (1.1)$$

wobei die Summe über die Determinanten $\det(\mathbf{M}_l) = D\mathbf{M}_l$ aller l -Hauptminoren genommen wird.

Die Zahl x_0 heiße *Eigenwert* der Matrix \mathbf{M} , falls $p_{\mathbf{M}}(x_0) = 0$ ist und $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(\mathbf{M}, x_0)$ sei ein zu x_0 gehörender *Eigenvektor* von Matrix \mathbf{M} , falls $\mathbf{M}\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0 x_0$ gilt.

Matrix $\mathbf{C} = \mathbf{C}_n = (c_{jk})$ heiße *zirkulante n -Matrix*, falls die $k = 1, 2, \dots, n$ Werte c_{1k} gegeben sind und $c_{j+1,k+1} = c_{jk}$ ($1 \leq j, k < n$) sowie $c_{j+1,1} = c_{jn}$ ($1 \leq j < n$) sind. In Matrix \mathbf{C} können also die

Elemente zeilenweise um 1 versetzt betrachtet werden.

Matrix $\mathbf{S} = \mathbf{S}_n = (s_{jk})$ heiße *schiefzirkulante n-Matrix*, falls die s_{1k} bekannt und

$s_{j+1,k+1} = s_{jk}$ ($1 \leq j, k < n$), $s_{j+1,k=1} = -s_{jn}$. ($1 \leq j < n$) sind. Matrix \mathbf{S} ergibt sich aus \mathbf{C} , indem für $j \leq k$ alle Elemente c_{jk} durch s_{jk} ersetzt und unterhalb der Hauptdiagonalen ($j > k$) alle c_{jk} durch $-s_{jk}$ ersetzt werden.

Je ein Beispiel für eine zirkulante und eine schiefzirkulante 3-Matrix mit den paarweise nicht notwendig verschiedenen komplexen Elementen a, b, c :

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_3 = \text{circ}(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{S} = \mathbf{S}_3 = \text{scirc}(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -c & a & b \\ -b & -c & a \end{pmatrix}.$$

Den Matrizen \mathbf{C} und \mathbf{S} kann jeweils die „begleitende Funktion“

$$f_{\mathbf{C}}(x) = \sum_{k=1}^{k=n} c_{1k} x^{k-1} \quad \text{bzw.} \quad f_{\mathbf{S}}(x) = \sum_{k=1}^{k=n} s_{1k} x^{k-1} \quad \text{zugeordnet werden.} \quad (1.2)$$

Diese sind nach Davis⁽¹⁾ zur Berechnung der Eigenwerte von \mathbf{C} und \mathbf{S} geeignet.

2. Polynome, Eigenwerte, Eigenvektoren und einige trigonometrische Formeln

Gegeben seien die komplexe Zahl z und die n -Matrizen $\mathbf{C} = (c_{jk}) = \text{circ}(z^0, z, \dots, z^{n-1})$, $\mathbf{S} = (s_{jk}) = \text{scirc}(z^0, z^1, \dots, z^{n-1})$, wobei $0^0 = 1$ gesetzt wird.

Die Elemente von \mathbf{C} und \mathbf{S} sind also

$$c_{jk} = s_{jk} = z^{k-j} \quad (j \leq k) \quad \text{und} \quad c_{jk} = -s_{jk} = z^{n+k-j} \quad (j > k). \quad (*)$$

Offensichtlich erfüllen diese

$$\begin{aligned} \text{für } j \neq k \text{ die Bedingungen } c_{jk}c_{kj} &= z^n \text{ und } s_{jk}s_{kj} = -z^n \quad \text{und} \\ \text{für } j = k \text{ haben wir } c_{jj} &= s_{jj} = z^0 = 1. \end{aligned} \quad (**)$$

Satz 1: Die charakteristischen Polynome der Matrizen \mathbf{C} und \mathbf{S} sind:

$$p_{\mathbf{C}}(x, z) = x^n + \sum_{l=1}^{l=n} (-1)^l \binom{n}{l} (1 - z^n)^{l-1} x^{n-l} \quad (2.1)$$

und

$$p_{\mathbf{S}}(x, z) = x^n + \sum_{l=1}^{l=n} (-1)^l \binom{n}{l} (1 + z^n)^{l-1} x^{n-l}. \quad (2.2)$$

Beweis:

Die Elemente der Hauptminoren \mathbf{C}_l und \mathbf{S}_l genügen den Gleichungen (*), (**).

Zunächst sind die Determinanten

$DC_{l=0} = DS_{l=0} = 1$ (Gantmacher⁽³⁾, Marcus & Minc⁽⁸⁾) und
 $DC_{l=1} = DS_{l=1} = 1$.

Zirkulante Matrix $C = (c_{jk})$:

Es sei $C_l = (c_{jk})$ ein l -Hauptminor von C , $l = 2, 3, \dots, n$. Wir berechnen die Determinante $DC_l = \det(C_l) = \det(c_{j'k'})$ und $j', k' = 1', 2', \dots, l' = l$.

Determinante DC_l wird in eine Determinante DC'_l mit den Elementen $c'_{j'k'}$ überführt, wobei $DC'_l = DC_l$ ist. Es sind für

$$j' > k' \geq 1: \quad c'_{j'k'} = c_{j'k'} - c_{j'1'}c_{1'k'} = z^{n+k'-j'} - z^{n+1'-j'}z^{k'-1'} = z^{n+k'-j'} - z^{n+k'-j'} = 0 \quad \text{und für} \\ j' \leq k': \quad c'_{j'k'} = c_{j'k'} - c_{j'1'}c_{1'k'} = z^{k'-j'} - z^{n+1'-j'}z^{k'-1'} = z^{k'-j'} - z^{n+k'-j'} = z^{k'-j'}(1 - z^n).$$

Somit hat die Determinante DC'_l folgende Elemente: in der Hauptdiagonalen stehen neben dem Wert $c_{1'1'} = 1$ die $(l-1)$ weiteren Werte $(1 - z^n)$, während unterhalb von ihr nur die Zahl 0 (Null) vorhanden ist. Wir haben $DC'_l = DC_l = (1 - z^n)^{l-1}$, wobei $2 \leq l \leq n$ ist.

Schiefzirkulante Matrix $S = (s_{jk})$:

Es sei $S_l = (s_{jk})$ ein l -Hauptminor von S , $l = 2, 3, \dots, n$. Wir berechnen die Determinante $DS_l = \det(S_l) = \det(s_{j'k'})$ und $j', k' = 1', 2', \dots, l' = l$.

Determinante DS_l wird, wie oben, in eine Determinante DS'_l mit den Elementen $s'_{j'k'}$ überführt, wobei $DS'_l = DS_l$ ist. Hier ergeben sich

$$j' > k' \geq 1: \quad s'_{j'k'} = s_{j'k'} - s_{j'1'}s_{1'k'} = -z^{n+k'-j'} - (-z^{n+1'-j'})z^{k'-1'} = -z^{n+k'-j'} + z^{n+k'-j'} = 0 \quad \text{und für} \\ j' \leq k': \quad s'_{j'k'} = s_{j'k'} - s_{j'1'}s_{1'k'} = z^{k'-j'} - (-z^{n+1'-j'})z^{k'-1'} = z^{k'-j'} + z^{n+k'-j'} = z^{k'-j'}(1 + z^n).$$

Dabei erhalten wir in der Hauptdiagonalen von DS'_l ebenfalls genau $(l-1)$ mal den Wert $(1 + z^n)$ und unterhalb von ihr wieder ausschließlich Nullen.

Damit ist $DS_l = (1 + z^n)^{l-1}$, wobei $2 \leq l \leq n$ ist.

Für die Hauptminoren C_l und S_l von C bzw. S gibt es insgesamt $\binom{n}{l}$ Möglichkeiten.

Damit ist Satz 1 ist bewiesen. ☺

Folgerungen:

F.1: Falls $z = 0$ ist, so ergibt sich $p_C(x, 0) = p_S(x, 0) = \sum_{l=0}^{l=n} (-1)^l \binom{n}{l} x^{n-l} = (x-1)^n$ das

charakteristische Polynom der Einheitsmatrix $I = I_n$.

F.2: Wird $z = z_n = \sqrt[n]{1} = \exp(2\pi i/n) = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$, n -te Einheitswurzel ($i = \sqrt{-1}$), gewählt so sind die charakteristischen Polynome von C und S gegeben zu

$$p_c(x, z_n) = x^n - nx^{n-1} = x^{n-1}(x - n) \quad \text{und} \quad (2.3)$$

$$p_s(x, z_n) = x^n + \sum_{l=1}^{l=n} (-1)^l 2^{l-1} \binom{n}{l} x^{n-l}. \quad (2.4)$$

F.3: Setzt man $z = z_n^k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, so bleiben die Gleichungen (2.3) und (2.4) erhalten.

F.4: Wird $z = -z_n$ gesetzt, so sind für

$$n \text{ gerade:} \quad p_c(x, -z_n) = p_c(x, z_n) \text{ und } p_s(x, -z_n) = p_s(x, z_n) \quad (2.5)$$

$$n \text{ ungerade:} \quad p_c(x, -z_n) = p_s(x, z_n) \text{ und } p_s(x, -z_n) = p_c(x, z_n). \quad (2.6)$$

F.5: Ist $z = z_{2n} = \exp(\pi i/n) = \cos(\pi/n) + i \cdot \sin(\pi/n)$ so ergeben sich die Polynome

$$p_c(x, z_{2n}) = p_s(x, z_n) \quad \text{und} \quad p_s(x, z_{2n}) = p_c(x, z_n). \quad (2.7)$$

Bemerkungen:

B.1: Der vollständige Graph K_n mit n Knotenpunkten hat das charakteristische Polynom $p_{K_n}(x) = (x - n + 1)(x + 1)^{n-1}$. Somit ist $p_c(x, z_n) = p_{K_n}(x - 1) = (x - n)x^{n-1}$.

B.2: Mit der Formel (2.4) lässt sich eine weitere (allerdings weniger geeignete) Formel für $p_s(x, z_n)$ herleiten: $p_s(x, z_n) = x^n + \frac{1}{2} [(x - 2)^n - x^n] = \frac{1}{2} [x^n + (x - 2)^n]$.

Es sind $z = z_n$, $z^* = z_{2n}$, x_l die Eigenwerte und $u_l(C) = u(C, x_l)$ die dazugehörigen Eigenvektoren der Matrix C (ganz analog bei S).

Satz 2:

Die Eigenwerte von C können aus der Gleichung (2.3) sofort abgelesen werden. Eigenwert $x_1 = n$ hat die Vielfachheit 1 und die übrigen Eigenwerte sind $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$. Die dazugehörigen Eigenvektoren⁽¹⁾ $u_l(C)$ von C ergeben sich zu $u_l(C) = (1, z^{l-1}, \dots, z^{(l-1)(n-1)})^T$.

Die Eigenwerte von S werden auf andere Weise bestimmt. Hierzu nutzt man nach Davis⁽¹⁾ neben $z = z_n = \exp(2\pi i/n)$ und $z^* = z_{2n} = \exp(\pi i/n)$ die in Gleichung (1.2) gegebene begleitende Funktion $f_s(x)$. Man setze hierin für $x = z^* z^{l-1}$ und erhält den Eigenwert $x_l = f_s(z^* z^{l-1})$.

$$\text{Somit ist } x_l = f_s(z^* z^{l-1}) = \sum_{k=0}^{k=n-1} z^k (z^* z^{l-1})^k = \sum_{k=0}^{k=n-1} (z^* z^l)^k.$$

Es sind $z^* z^l = \exp((2l+1)\pi i/n) = \cos((2l+1)\pi/n) + i \sin((2l+1)\pi/n)$.

Wir betrachten von x_l den Real- und den Imaginärteil getrennt, wobei zwei Formeln von Ryshik und Gradstein⁽¹¹⁾ genutzt werden können:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \cos(u + kv) = \cos(u + (n-1)v/2) \sin(nv/2) \operatorname{cosec}(v/2) \quad \text{und} \quad (2.8)$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \sin(u + kv) = \sin(u + (n-1)v/2) \sin(nv/2) \operatorname{cosec}(v/2). \quad (2.9)$$

Es sei bemerkt, dass für Winkel w gilt: $\operatorname{cosec}(w) = (\sin(w))^{-1}$.

Zur Berechnung von $x_l = \operatorname{Re}(x_l) + i \operatorname{Im}(x_l)$ setze man in den Formeln (2.8, 2.9) $u = 0$ und $v = (2l+1)\pi/n$.

Für den Realteil $\operatorname{Re}(x_l)$ von x_l erhält man zunächst

$$\operatorname{Re}(x_l) = \sum_{k=0}^{k=n-1} \cos(kv) = \cos((n-1)v/2) \sin(nv/2) \{\sin(v/2)\}^{-1}.$$

Mit $\cos((n-1)v/2) = \cos(nv/2 - v/2) = \cos(nv/2) \cos(v/2) + \sin(nv/2) \sin(v/2)$

ist $\operatorname{Re}(x_l) = [\cos(nv/2) \cos(v/2) + \sin(nv/2) \sin(v/2)] \sin(nv/2) \{\sin(v/2)\}^{-1}$.

In diesem Produkt sind wegen $v = (2l+1)\pi/n$:

$\cos(nv/2) = \cos((2l+1)\pi/2) = 0$, $\sin(nv/2) = \sin((2l+1)\pi/2) = \pm 1$ und

$\sin(v/2) = \sin((2l+1)\pi/2n) \neq 0$, $\cos(v/2) = \cos((2l+1)\pi/2n) \neq 0$. (#)

Also ist $\operatorname{Re}(x_l) = \sin^2((2l+1)\pi/2) = 1$ für jedes $l = 0, 1, \dots, n-1$ und $n > 1$.

Für den Imaginärteil $\operatorname{Im}(x_l)$ von x_l ergibt sich

$$\operatorname{Im}(x_l) = \sum_{k=0}^{k=n-1} \sin(kv) = \sin((n-1)v/2) \sin(nv/2) \{\sin(v/2)\}^{-1}.$$

Mit $\sin((n-1)v/2) = \sin(nv/2 - v/2) = \sin(nv/2) \cos(v/2) - \cos(nv/2) \sin(v/2)$ ist

$\operatorname{Im}(x_l) = [\sin(nv/2) \cos(v/2) - \cos(nv/2) \sin(v/2)] \sin(nv/2) \{\sin(v/2)\}^{-1}$.

Wegen der Formeln (#) ist

$\operatorname{Im}(x_l) = \sin^2(nv/2) \cos(v/2) / \sin(v/2) = \cot(v/2) = \cot((2l+1)\pi/2n)$ für jedes $l = 0, 1, \dots, n-1$ und $n > 1$.

Damit gilt der

Satz 3:

Die Eigenwerte von Matrix **S** sind für $l = 1, 2, \dots, n$ gegeben zu

$x_l = 1 + i \cdot \cot((2l+1)\pi/2n)$, $i = \sqrt{-1}$, $l = 0, 1, \dots, n-1$, $n > 1$ bzw.

$x_l = 1 + i \cdot \cot((2l-1)\pi/2n)$, $i = \sqrt{-1}$, $l = 1, 2, \dots, n$, $n > 1$. (2.10)

Die Eigenvektoren⁽¹⁾ $u_l(\mathbf{S})$ von **S** sind $u_l(\mathbf{S}) = (1, (z^* z^{l-1}), \dots, (z^* z^{(l-1)})^{(n-1)})^T$. ☺

Mit den Eigenwerten von Matrix **S** und Gleichung (2.4) ist

$$\prod_{l=1}^{l=n} (1 + i \cdot \cot((2l-1)\pi/2n)) = (-1)^n p_S(x=0, z_n) = 2^{n-1} \quad \text{bzw.} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \prod_{l=1}^{l=\lfloor n/2 \rfloor} (1 + \cot^2((2l-1)\pi/2n)) &= \prod_{l=1}^{l=\lfloor n/2 \rfloor} [\sin((2l-1)\pi/2n)]^{-2} = \\ &= \prod_{l=1}^{l=\lfloor n/2 \rfloor} (1 + \tan^2((n+1-2l)\pi/2n)) = 2^{n-1}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Hierin bedeutet $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, welche kleiner oder gleich x ist

($\lfloor \pi \rfloor = 3, \lfloor 2 \rfloor = 2, \lfloor -1,3 \rfloor = -2$).

Die Gleichungen (2.11) und (2.12) geben Anlaß zu weiteren Aussagen.

Bekannt ist die Summenformel⁽⁶⁾

$$\sum_{l=1}^{l=n} \cot^2((2l-1)\pi/4n) = n(2n-1). \quad (2.13)$$

Nach MAPLE-Rechnungen wird vermutet, dass $\sum_{l=1}^{l=n} (1 + \cot^2[(2l-1)\pi/(2n)]) = n^2$ ist. (V.1)

Eine zweite Vermutung

$$\prod_{l=1}^{l=\lfloor n/2 \rfloor} \{1 + x^2 \cot^2[(2l-1)\pi/(2n)]\} = 1/2[(x+1)^n + (-x+1)^n] \quad (V.2)$$

könnte beim Beweis von (V.1) hilfreich sein.

3. Die Koeffizienten von $p_s(x, z_n)$

Für $n > 0$ und $0 \leq l \leq n$ können die Koeffizienten $s(n, 0) = 1$ und $s(n, l > 0) = (-1)^l 2^{l-1} \binom{n}{l}$ der

charakteristischen Polynome $p_s(x, z_n) = \sum_{l=0}^{l=n} s(n, l)x^{n-l}$ in Form eines Dreiecks, analog dem

Pascal-Dreieck, angeordnet werden (s. u.). Dabei setze man zur Vervollständigung $s(0, 0) := 1$.

n							$x = 1$	$x = -1$
0							1	1
1							0	-2
2							1	5
3							0	-14
4							1	41
5							0	-122

Diese Anordnung werde als *S-Dreieck* (kurz: *SD*) bezeichnet. Daneben findet man zwei Spalten mit den Werten für $p_s(x = 1, z_n)$ und $p_s(x = -1, z_n)$.

In *SD* gelten:

i) Mit den Werten $s(n \geq 0, 0) = 1$, $s(n, 1) = -n$ und $s(n, n) = (-1)^n 2^{n-1}$ gilt für $l = 2, 3, \dots, n-1$ die Rekursionsformel

$$s(n, l) = (-2)s(n-1, l-1) + s(n-1, l). \quad (3.1)$$

Denn es ist mit $s(n, l) = (-1)^l (2)^{l-1} \binom{n}{l}$, $1 < l < n$,

$$\begin{aligned} s(n, l) &= -2 \cdot s(n-1, l-1) + s(n-1, l) = \\ &= (-2)[(-1)^{l-1} \cdot 2^{l-2} \binom{n-1}{l-1}] + [(-1)^l \cdot 2^{l-1} \binom{n-1}{l}] = (-1)^l \cdot (2)^{l-1} \binom{n}{l}. \end{aligned} \quad \odot$$

$$\text{ii) } p_s(x = 1, z_n) = \sum_{l=0}^{l=n} s(n, l) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n). \quad (3.2)$$

Beweis:

$$(-1)^n = (1 + (-2))^n = \sum_{l=0}^{l=n} (-2)^l \binom{n}{l} = 1 + 2 \sum_{l=1}^{l=n} (-1)^l 2^{l-1} \binom{n}{l} = 2p_s(1, z_n) - 1. \quad \text{☺}$$

$$\text{iii) } p_s(x = -1, z_n) = \sum_{l=0}^{l=n} (-1)^l s(n, l) = \frac{1}{2}(-1)^n (3^n + 1) \quad (3.3)$$

Beweis:

Es ist $(-1)^n p_s(x = -1, z_n) = 1 + \sum_{l=1}^{l=n} 2^{l-1} \binom{n}{l}$ und mit

$$3^n = (1 + 2)^n = \sum_{l=0}^{l=n} 2^l \binom{n}{l} = 1 + 2 \sum_{l=1}^{l=n} 2^{l-1} \binom{n}{l} = 2(-1)^n p_s(x = -1, z_n) - 1 \text{ folgt Formel (3.3). } \quad \text{☺}$$

iv) Für $n \geq 1$ gelten außerdem:

$$p_s(x = -1, z_n) = -3p_s(x = -1, z_{n-1}) + (-1)^{n-1} \quad \text{und} \quad (3.4)$$

$$\text{mit } l \rightarrow \infty \text{ ist } \lim [s(2l, l)/s(2l-2, l-1)] = -8. \quad (3.5)$$

v) Die Zahlenfolge $\{(-1)^l s(2l, l)\}$ ist in Sloane⁽¹²⁾ unter der Nummer A069723 (A082142, Duplikat) zu finden. Die Zahlenfolge $\{ | p_s(x = -1, z_n) | \}$ ist unter A007051 bzw. A124302 und die Zahlenfolge $\{ - | p_s(x = -1, z_n) | \}$ unter A123183 gegeben.

4. Eine Determinante

Von Interesse könnte die n -reihige Determinante $d = \det(d_{j,k})$ mit $d_{j,k} = s(j + k - 2, k - 1)$ sein ($j, k = 1, 2, \dots, n$), wobei $d_{j,1} = 1$ und $d_{j,k>1} = (-1)^{k-1} 2^{k-2} \binom{j+k-2}{k-1}$ sind. Der Faktor (-1) in jeder zweiten Spalte von d und die Potenzen von 2 können als Produkt $(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} 2^b$ mit $b = \binom{n-1}{2}$ vor die Determinante gezogen werden, sodass sich $d = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} 2^b c$ und $c = \det \left(\binom{j+k-2}{k-1} \right)$ ergeben.

Re'nyi⁽¹⁰⁾ hat gezeigt, dass $c = 1$ ist. Das beweist den

Satz 5:

Die Determinante $d(n) = \det(d_{j,k})$ mit $d_{j,k} = s(j + k - 2, k - 1)$ und $j, k = 1, 2, \dots, n$, wobei $d_{j,1} = 1$ und $d_{j,k>1} = (-1)^{k-1} 2^{k-2} \binom{j+k-2}{k-1}$ sind, hat den Wert $d(n) = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} 2^a$ mit $a = \binom{n-1}{2}$. (4.1)

Dabei bedeutet $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist ($\lfloor 3 \rfloor = \lfloor \pi \rfloor = 3$). ☺

5. Literatur

(1) Davis, P. J.: Circulant Matrices, John Wiley et Sons, New York-Chichester-Brisbane-Toronto, **1979**.

- (2) Bozkurt, D., Da Fonseca, C. M. and F. Yilmaz: The determinants of circulant and skew-circulant matrices with Tribonacci numbers, Math. Sci. and Appl. E-Notes, **2**(2), **2014**, 67 – 75.
- (3) Gantmacher, F. R.: Matrizenrechnung, Teil I, Allgemeine Theorie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin **1958**, Seite 66 ff.
- (4) Garbanati, D. and R. C. Thompson: Skew Circulant Quadratic Forms, Journal of Number Theory, **4**(**1972**), 557 – 572.
- (5) Gray, R. M.: Toeplitz and Circulant Matrices: A review, rmgray@stanford.edu.
- (6) Hansen, E.: Table of Series and Products, Prentice-Hall, Englewood, Cliffs 1975
- (7) Kalman, D. and J. E. White: Polynomial Equations and Circulant Matrices, The Mathematical Association of America, Nov **2001**, Monthly 108, 821 – 840.
- (8) Lind, D. A.: A Fibonacci Circulant, Fibonacci Quart. **8**(**1970**), 449 – 455.
- (9) Marcus, M. and H. Minc: A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities, Dover Publications, Inc., New York, 1992, p. 17, 21
- (10) Re'nyi, A.: New methods and results in combinatorial analysis II, Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Tud. Oszt. Kozl., **16** (**1966**), 159 – 177 (in Hungarian, English summary).
- (11) Ryshik, I. M. und I. S. Gradstein, Summen-, Produkt- und Integraltafeln, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, **1957**, S. 30
- (12) Sloane, N. J. A.: The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences.
- (13) Yun Gao, Zhaolin Jiang, Yanpeng Gong: On the Determinants and Inverses of Skew Circulant and Skew Left Circulant Matrices with Fibonacci and Lucas Numbers, WSEAS Transactions on Mathematics, **4**(12) **2013**, 472 – 481.
- (14) Zhaolin Jiang, Jinjiang Yao and Fuliang Lu: On Skew Circulant Type Matrices Involving Any Continuous Fibonacci Numbers, Hindawi Publishing Corporation, Abstract and Applied Analysis, **2014**, Article ID 483021, 10 pages, <http://dx.doi.org/10.1155/2014/483021>.
- (15) Zhaolin Jiang, Yunlan Wei: Skew Circulant Type Matrices Involving the Sum of Fibonacci and Lucas Numbers, Hindawi Publishing Corporation, Abstract and Applied Analysis, **2015**, Article ID 951340, 9 pages, <http://dx.doi.org/10.1155/2015/951340>.